



TITLE:

# On mixed weight Hilbert modular forms and their structure theorem (Analytic and Arithmetic Theory of Automorphic Forms)

AUTHOR(S):

青木, 宏樹

---

CITATION:

青木, 宏樹. On mixed weight Hilbert modular forms and their structure theorem (Analytic and Arithmetic Theory of Automorphic Forms). 数理解析研究所講究録 2019, 2100: 65-79

ISSUE DATE:

2019-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/251794>

RIGHT:

# On mixed weight Hilbert modular forms and their structure theorem

東京理科大学・理工学部 青木 宏樹

Hiroki Aoki

Department of Mathematics,  
Faculty of Science and Technology,  
Tokyo University of Science

We determine the structure of some modules of mixed weight Hilbert modular forms. We mainly discuss Hilbert modular forms with discriminant 5 and then with discriminant 8 in the last section. This is a joint work with Sho Takemori (Max Planck Institute for Mathematics). This work with more details will be appeared in a journal in near future.

混合重みヒルベルト保型形式のなす加群の構造をそれなりに多くの場合に決定することができたので、その方法と結果を簡単に述べる。本文中では主に判別式5の2次体における場合を扱い、最後に判別式8の2次体についても少し触れる。この結果は、竹森翔さん（マックスプランク数学研究所）との共同研究の成果であり、近日中に論文誌にて発表の予定である。

## 1 研究の動機

ヒルベルト保型形式は、数論において、あるいはより広範に代数学・幾何学において重要な研究課題のひとつであり、実際に様々なことが調べられている。しかし、簡単だから、あるいは当面充分だからという理由で、しばしばその対象は「平行重み」の場合に限られてきた。とはいえ、たとえ「平行重み」だけに興味があるとしても、たとえばヒルベルト・ジーゲル保型形式から派生するヒルベルト・ヤコビ形式を調べようとすれば、そのマクローリン展開に「混合重み」のヒルベルト保型形式があらわれる。したがって、「混合重み」のヒルベルト保型形式についてもある程度調べておくに越したことはない。講演者は以前にごく簡単な場合について混合重みのヒルベルト保型形式のなす加群の構造を決定しており ([2])、Boylan, 林田, Skoruppa によるヒルベルト・ヤコビ形式を調べた論説 ([4]) ではその結果が用いられている。最近になって、講演者は、ある工夫によって混合重みのヒルベルト保型形式のなす加群の構造がかなり多くの場合に決定できそうなことに気づき、その分野に詳しく、しかもコンピュータの利用にも精通している竹森翔さんの協力を得て、今回の結果を得た。そのアイデアと結果を、ここで紹介したい。

## 2 研究の概要

### 2.1 ヒルベルト保型形式

ここでは実2次体におけるヒルベルト保型形式に限って議論を進める。とりあえず、最後の章を除いて、簡単のため実2次体は判別式5のものだけを扱う。

実2次体  $K := \mathbb{Q}(\sqrt{D_K})$  の元  $\nu = u + v\sqrt{D_K} \in K$  に対し、その共役を  $\nu' := u - v\sqrt{D_K} \in K$  と書くことにする。また、 $K$  の整数環を  $\mathcal{O}_K$  と書くことにする。(定義は一般の実2次体に対して行うが、本文で実際に扱うのは、ほとんどが  $D_K = 5$  の場合で、他には最後に一部  $D_K = 8$  の場合があるだけである。)

群  $\mathrm{SL}(2, K)$  は、複素上半平面

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$$

2個の直積空間  $\mathbb{H}^2$  に

$$\mathbb{H}^2 \ni \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2) \mapsto \gamma\langle \boldsymbol{\tau} \rangle := \left( \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}, \frac{a'\tau_2 + b'}{c'\tau_2 + d'} \right) \in \mathbb{H}^2$$

で作用する。重みと呼ばれる2つの整数の組  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  を固定すると、群  $\mathrm{SL}(2, K)$  は、 $\mathbb{H}^2$  上の正則関数全体のなす集合に

$$F(\boldsymbol{\tau}) \mapsto (F|_{\mathbf{k}}\gamma)(\boldsymbol{\tau}) := (c\tau_1 + d)^{-k_1} (c'\tau_2 + d')^{-k_2} F(\gamma\langle \boldsymbol{\tau} \rangle)$$

で作用する。ヒルベルトモジュラー群を  $\Gamma := \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_K)$  と書くことにする。

定義.  $\mathbb{H}^2$  上の正則関数  $F$  が重み  $\mathbf{k}$  のヒルベルト保型形式であるとは、任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対し  $F|_{\mathbf{k}}\gamma = F$  が成り立つことである。

重み  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$  のヒルベルト保型形式全体のなす  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間を、 $\mathbb{M}_{\mathbf{k}}$  または  $\mathbb{M}_{k_1, k_2}$  と書くことにする。 $-E_2 \in \Gamma$  であることから直ちに、もし  $k_1 + k_2$  が奇数であれば  $\mathbb{M}_{\mathbf{k}} = \{0\}$  であることがわかる。したがって、一般性を失わずに  $k_1 + k_2$  が偶数であると仮定してよい。そこで、 $F \in \mathbb{M}_{k_1, k_2}$  に対して

$$F^*(\tau_1, \tau_2) := (-1)^{\frac{k_1 + k_2}{2}} F(\tau_2, \tau_1) \in \mathbb{M}_{k_2, k_1}$$

と定める。これにより  $\mathbb{M}_{k_1, k_2}$  と  $\mathbb{M}_{k_2, k_1}$  は  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間として同型になる。特に、平行重み ( $k_1 = k_2$ ) の場合には

$$\mathbb{M}_{k, k}^+ := \{ F \in \mathbb{M}_{k, k} \mid F^* = F \}$$

$$\mathbb{M}_{k, k}^- := \{ F \in \mathbb{M}_{k, k} \mid F^* = -F \}$$

と定めることにより、直和分解

$$\mathbb{M}_{k,k} = \mathbb{M}_{k,k}^+ \oplus \mathbb{M}_{k,k}^- \quad \left( F \mapsto \left( \frac{F + F^*}{2}, \frac{F - F^*}{2} \right) \right)$$

が得られる。

さて、一般論により、 $\mathbb{M}_k$  は有限次元  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間であること、特に  $\mathbb{M}_{(0,0)} = \mathbb{C}$  であること、また  $k_1$  と  $k_2$  がともに非正であれば  $k_1 = k_2 = 0$  の場合を除いて  $\mathbb{M}_k = \{0\}$  であることが知られている。これより

$$\mathbb{A}_0 := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{M}_{k,k} \quad \text{および} \quad R := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{M}_{k,k}^+$$

は（平行重みヒルベルト保型形式のなす）次数付き環、

$$\mathbb{M}_* := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{M}_k$$

は（混合重みヒルベルト保型形式のなす）2重次数付き環になることがわかる。興味があるのは、これら、特に、あまりよく知られていない最後の  $\mathbb{M}_*$  の構造であるが、後述するように、残念ながら、 $\mathbb{M}_*$  は  $\mathbb{C}$  上（あるいは  $\mathbb{A}_0$  上）有限生成ではない。仕方がないので、 $\mathbb{M}_*$  のかわりに、整数  $s$  に対して定まる空間

$$\mathbb{A}_s := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{M}_{k,k+2s}$$

の構造を調べることにする。

$$\mathbb{M}_* = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathbb{A}_s$$

であるから、 $\mathbb{A}_s$  たちの構造がすべてわかれば、まあおおむね  $\mathbb{M}_*$  の構造を決定したことになる。ここで  $\mathbb{A}_s$  と  $\mathbb{A}_{-s}$  は重みのシフトを除いて  $R$ -加群として同型であるから、 $s \geq 0$  の場合だけを考えれば十分である。講演者と共同研究者（面倒なので以下「我々」と書くことにする\*）は、 $D_K = 5$  の場合について  $s \leq 60$  のすべての自然数に対して、 $D_K = 8$  の場合について  $s \leq 20$  のすべての自然数に対して、 $\mathbb{A}_s$  の構造を決定した。結果論ではあるが、この範囲ではすべて、 $\mathbb{A}_s$  は  $R$ -加群として有限生成になっている。

\*「我々」などと偉そうに書いてしまいましたが、実情は次のようなものです：

講演者（青木）が共同研究者（竹森さん）にアイデアを持ち込んだときには、青木はせいぜい  $s \leq 6$  あたりまでできれば御の字だと思っていた。（しかもそのアイデアは一部間違っていた！）ところがなんと、竹森さんがより良いアイデアを思いつき、しかもコンピュータによる計算に長けていたので、一気にたくさんの場合ができてしまった。ということで、実情は「我々」どころか、ほぼほぼ「竹森さん」です。

## 2.2 既知の結果

これより後、最後の章を除いて  $D_K = 5$  とする。2 次体のなかで最も判別式が小さいこの場合は、歴史的には最も早く、平行重みヒルベルト保型形式のなす環の構造が決定された。1960 年代、Gundlach [8, 9] は、4 つの 0 でない保型形式

$$G_2 \in \mathbb{M}_{2,2}^+, \quad G_5 \in \mathbb{M}_{5,5}^+, \quad G_6 \in \mathbb{M}_{6,6}^+, \quad G_{15} \in \mathbb{M}_{15,15}^-$$

を構成し、

$$R = \mathbb{C}[G_2, G_5, G_6]$$

であること、 $G_2, G_5, G_6$  は代数的独立であること、および

$$\mathbb{M}_{k+15, k+15}^- = G_{15} \mathbb{M}_{k,k}^+$$

であることを証明した。すなわち、

$$\mathbb{A}_0 = R \oplus G_{15}R \quad (R = \mathbb{C}[G_2, G_5, G_6])$$

ということである。現在では、この結果の証明は数通り知られているようである。なお、4 つの生成元  $G_2, G_5, G_6, G_{15}$  は、実 2 次体上のテータ関数を用いるなどの方法で明示的に構成することができるので、必要に応じてそのフーリエ係数を計算することも可能である。

混合重みの場合については、2000 年代に入り、講演者が次の結果 ([2]) を示した。

$$\mathbb{A}_1 = G_{7,9}R + G_{8,10}R + G_{11,13}R, \quad \mathbb{A}_2 = G_{4,8}R \oplus G_{7,11}R$$

なお、ここでの生成元  $G_{\bullet, \bullet}$  の添字部分は、その生成元の重みをあらわしている。また、これらの生成元はすべて、後述する微分作用素をもちいて具体的に構成されている。

## 2.3 得られた結果

このように、 $D_K = 5$  の場合については  $R$  の次数付き環としての構造、また  $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$  の次数付き  $R$ -加群としての構造は既に決定されていたのだが、今回、我々は、 $s \leq 60$  のすべての自然数に対して、 $\mathbb{A}_s$  の次数付き  $R$ -加群としての構造を決定した。(そして  $D_K = 8$  の場合についても  $s \leq 20$  のすべての自然数に対して、 $\mathbb{A}_s$  の構造を決定した。) すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 1. 60 以下の非負整数  $s$  に対し、 $R$  加群  $\mathbb{A}_s$  の極小自由分解は本文末尾の表のとおりである。特に  $s \leq 60$  においては、 $\mathbb{A}_s$  の射影次元は 1 以下である。

本文末尾の表から  $s$  が 9 以下の部分を抜き書きしたのが次の表である。

$\mathbb{A}_s$	$M_0$	$M_1$	$\mathbb{A}_s$	$M_0$	$M_1$
0	0, 15	—	5	5, 6, 7, 10	11, 12
1	7, 8, 11	13	6	2, 3, 6	8
2	4, 7	—	7	4, 5, 7, 8	10, 13
3	3, 6	—	8	3, 4, 6, 7	9, 12
4	4, 5, 8	10	9	3, 4, 5, 6	10, 11

表中の数字は  $\mathbb{A}_s$  の極小自由分解

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow \mathbb{A}_s \rightarrow 0$$

における  $M_0$  および  $M_1$  のシフトの量をあらわしている。たとえば  $s = 1$  の場合には、 $M_0$  の部分に 7, 8, 11 と記されていることから、生成元は 3 個でその重みは (7, 9), (8, 10), (11, 13) であるとわかり、 $M_1$  の部分に 13 とあることから、生成元の間には重み (13, 15) の関係式がひとつあることがわかる。いいかえれば、 $\mathbb{A}_1$  の極小自由分解は

$$0 \rightarrow R(-13) \rightarrow R(-7) \oplus R(-8) \oplus R(-11) \rightarrow \mathbb{A}_1 \rightarrow 0$$

だということである。また  $s = 2$  の場合には、 $M_0$  の部分に 4, 7 と記されていることから、生成元は 2 個でその重みは (4, 8), (7, 11) であるとわかり、 $M_1$  の部分に何もなかったことから、生成元の間に関係式がない、すなわち  $\mathbb{A}_2$  は自由加群であるということがわかる。いいかえれば、 $\mathbb{A}_2$  の極小自由分解は

$$0 \rightarrow R(-4) \oplus R(-7) \rightarrow \mathbb{A}_2 \rightarrow 0$$

だということである。生成元のフーリエ係数や生成元の上に成り立つ関係式などの具体的な数値は [3] にて見ることができる。

さらに、我々は、次の結果も得た。

命題 2.  $R$ -加群  $\mathbb{A}_s$  の生成元が 3 個以下であるならば、非負整数  $s$  は 9 以下でなければならない。

定理 1 と命題 2 からただちに、次の結果が得られる。

定理 3.  $\mathbb{A}_s$  が  $R$ -自由加群となるのは  $s = 0, 2, 3$  のときだけである。また、 $R$ -加群  $\mathbb{A}_s$  の生成元の最小個数が 3 となるのは  $s = 1, 4, 6$  のときだけである。

### 3 証明の準備

#### 3.1 微分作用素

楕円モジュラー形式における Rankin-Cohen 微分作用素と同様、ヒルベルト保型形式においても、複数の保型形式から微分作用素をもちいて新しい保型形式を構成することができる。その具体的な形は、2000 年代初頭に、Lee [11, 10] により与えられた。すなわち、 $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^2$  をそれぞれ非負整数 2 つの組とし、 $F \in \mathbb{M}_{\mathbf{k}}$  および  $G \in \mathbb{M}_{\mathbf{l}}$  をそれぞれ重み  $\mathbf{k}, \mathbf{l}$  のヒルベルト保型形式とすると、

$$[F, G]_{\mathbf{m}} := \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^2 \\ \alpha + \beta = \mathbf{m}}} (-1)^\beta \binom{\mathbf{m} + \mathbf{l} - 1}{\alpha} \binom{\mathbf{m} + \mathbf{k} - 1}{\beta} (\partial^\alpha F) (\partial^\beta G),$$

で定義される  $[F, G]_{\mathbf{m}}$  は重み  $\mathbf{k} + \mathbf{l} + 2\mathbf{m}$  のヒルベルト保型形式になる。ただしここでは、 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ ,  $(-1)^\beta := (-1)^{\beta_1 + \beta_2}$ ,

$$\binom{\mathbf{m} + \mathbf{l} - 1}{\alpha} := \binom{m_1 + l_2 - 1}{\alpha_1} \binom{m_2 + l_1 - 1}{\alpha_2},$$

$$\binom{\mathbf{m} + \mathbf{k} - 1}{\beta} := \binom{m_1 + k_2 - 1}{\beta_1} \binom{m_2 + k_1 - 1}{\beta_2},$$

$$\partial^\alpha F := \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{\alpha_1 + \alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} F}{\partial \tau_1^{\alpha_1} \partial \tau_2^{\alpha_2}}, \quad \partial^\beta G := \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{\beta_1 + \beta_2}} \frac{\partial^{\beta_1 + \beta_2} G}{\partial \tau_1^{\beta_1} \partial \tau_2^{\beta_2}}$$

と略記している。前小節であらわれた  $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$  の生成元たちは、 $R$  の生成元たちから、この微分作用素をもちいて

$$G_{7,9} := [G_2, G_5]_{(0,1)}, \quad G_{8,6} := [G_2, G_6]_{(0,1)}, \quad G_{11,13} := [G_5, G_6]_{(0,1)}$$

および

$$G_{4,8} := [G_2, G_2]_{(0,2)}, \quad G_{7,11} := [G_2, G_5]_{(0,2)}$$

として構成することができる。

この微分作用素は、具体的な式で与えられているので、フーリエ展開の係数を具体的に計算することができる。実際、 $R$  の生成元  $G_2, G_5, G_6$  はみなテータ関数をもちいて構成できるのでフーリエ展開の係数を具体的に計算することができ、それゆえ上記の  $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$  の生成元たちのフーリエ展開の係数も

具体的に計算することができ、0 になっていないことが確かめられる。しかし一般に、 $[F, G]_m$  は 0 になってしまう可能性が存在する。例えば、奇数  $m$  に対しては  $[F, F]_{(0,m)} = 0$  であり（代数的に各項が打ち消し合う）、また、代数的には消えていなくても結果が 0 になる場合もある。ただし、やはりフーリエ展開の係数を見ることにより、偶数  $m$  とカスプ形式ではない  $F$  に対しては、 $[F, F]_{(0,m)} \neq 0$  が成り立つ。特に、偶数  $m$  に対して、 $[G_2, G_2]_{(0,m)} \in \mathbb{M}_{4,4+2m}$  は 0 でないヒルベルト保型形式である。したがって、次の定理が成り立つ。

**定理 4.**  $\mathbb{M}_*$  は  $\mathbb{C}$  上有限生成ではない。

注. まったく同様の方針で、カスプ形式でない保型形式が存在しさえすれば、一般の総実代数体上の任意の群に関する混合重みヒルベルト保型形式のなす多重次数付き環が  $\mathbb{C}$  上有限生成ではないことが示せる。

## 3.2 ヤコビ恒等式

まず、 $F_1, F_2 \in \mathbb{A}_s$  に対して、

$$\langle F_1, F_2 \rangle := \frac{F_1 F_2^* - F_1^* F_2}{2G_{15}}$$

と定める。ここで  $F_1 F_2^* - F_1^* F_2 \in \mathbb{A}_0^- = G_{15}R$  であることに注意すれば、 $\langle F_1, F_2 \rangle \in R$  であることがわかる。したがって、 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{A}_s \times \mathbb{A}_s \rightarrow R$  は  $R$ -加群  $\mathbb{A}_s$  上の  $R$  値の歪対称 2 次形式である。このとき、次の命題が成り立つ。

**命題 5.**  $F_1, F_2, F_3 \in \mathbb{A}_s$  に対し、

$$F_1 \langle F_2, F_3 \rangle + F_2 \langle F_3, F_1 \rangle + F_3 \langle F_1, F_2 \rangle = 0$$

が成り立つ。

この命題はほとんど明らかであるが、極めて有用である。たとえば、次の定理はこの命題を使って容易に証明できる。

**定理 6.**  $Q(R)$  を  $R$  の商体とする。このとき、

$$\text{rank}_{Q(R)}(\mathbb{A}_s \otimes_R Q(R)) = 2$$

である。

証明.  $\mathbb{A}_s \neq \{0\}$  であり、また  $F \neq 0$  に対して  $Q(R)$  上  $F$  と  $G_{15}F$  は線形独立であることから  $\text{rank}_{Q(R)}(\mathbb{A}_s \otimes_R Q(R)) \geq 2$  であることがわかる。もしこの値が 3 以上であれば  $F$  および  $G_{15}F$  と線形独立な元が存在することになるが、 $\langle F, G_{15}F \rangle \neq 0$  であることから、これは先の命題 5 に矛盾する。  $\square$



## 4 証明のあらすじ

### 4.1 一番簡単な場合

実は、ここまでの準備だけで、 $s = 2$  の場合にはたちどころに構造が決定できる。微分作用素により  $G_{4,8}$  と  $G_{7,11}$  が構成でき、そのフーリエ係数をみれば  $\langle G_{4,8}, G_{7,11} \rangle$  は 0 でない定数であることがすぐにわかる。ゆえに、 $G_{4,8}$  と  $G_{7,11}$  は  $R$  上 1 次独立であり、また、任意の  $F \in \mathbb{A}_2$  はヤコビ恒等式 (命題 5) により

$$F = \frac{\langle F, G_{7,11} \rangle}{\langle G_{4,8}, G_{7,11} \rangle} G_{4,8} + \frac{\langle G_{4,8}, F \rangle}{\langle G_{4,8}, G_{7,11} \rangle} G_{7,11}$$

と書ける。したがって

$$\mathbb{A}_2 = G_{4,8}R \oplus G_{7,11}R$$

である。

さすがにこれほど簡単に話が進むのは  $s = 2$  の場合だけであるが、 $s = 1$  の場合も、もう少しゴチャゴチャした議論を行えば、ヤコビ恒等式をうまく使うことによって、手計算可能な範囲で初等的に構造を決定することができる。

### 4.2 一般の場合

実は、我々が用いた方法は、一般の  $s$  に対して  $\mathbb{A}_s$  の  $R$ -加群としての構造を確実に決定できるものではなく、やや場当たりのなものである。すなわち、微分作用素などを用いて  $\mathbb{A}_s$  の生成元となりそうな保型形式たちを構成したうえで、それが本当に  $\mathbb{A}_s$  を生成しているかどうかを判定し、うまくいけばニンマリという作戦である。

この作戦を進めるには、まず生成元の候補を見つけねばならない。 $\mathbb{A}_s$  の元となる保型形式は微分作用素を用いてさほど難なくいろいろと作れるのだが、しばしば重みが大きくなりすぎ、見るからに生成元ではなさそうなものばかりが得られることが普通である。そこで、得られた保型形式の対角成分への制限に注目する。得られた保型形式からより重みの小さい保型形式を得るには、次の補題が有力である。(というかこれくらいしか手がない。)

**補題 7.** もし  $F \in \mathbb{M}_{k,k+2s}$  が条件  $F(\tau, \tau) = 0$  を満たすなら、 $F$  は  $G_5$  で割り切れる。すなわち  $F/G_5 \in \mathbb{M}_{k-5,k-5+2s}$  である。

ここで、 $F \in \mathbb{M}_{k,k+2s}$  の対角成分への制限  $F(\tau, \tau)$  は  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  に関する重み  $2k + 2s$  楕円モジュラー形式になり、また、 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  に関する楕円モジュ

ラー形式のなす次数付き環の構造はよくわかっている（重み4と6のアイゼンシュタイン級数が生成元）ので、対角成分への制限が0になるかどうかは、フーリエ展開の最初のいくつかの係数を見るだけで判定できる。実際の作業は、微分作用素で保型形式を多めに作っておき、それらをガチャガチャ組み合わせて対角成分が0になれば  $G_5$  で割ることを繰り返し、もうこれ以上小さな重みの保型形式は作れなさそうだとした時点で、それを生成元の候補とするという流れである。

注. この部分は  $D_K = 5$  で群がフルモジュラーであることに強く依存している。たまたま  $G_5$  の零点集合の様子がよくわかっていることが幸いしている。他の場合でも、2次のジークル上半空間へのモジュラー埋め込みがあれば、対角部分で消えるヒルベルト保型形式が存在することが期待できるが、それが  $R$  の生成元になっているかどうかは何ともいえない、あるいはそのように  $R$  を選ぶ必要がある。

さて、生成元の候補

$$F_j \in \mathbb{M}_{k_j, k_j+2s} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

が見つかったとしよう。ただしここでは便宜上  $n \geq 3$  とし（生成元の候補が2個だけであれば適当なものをもう1個追加するだけである）、また  $F_1$  と  $F_2$  は  $Q(R)$  上独立であるとする（定理6の証明から、候補にはこの条件を満たすものが存在するはずである）。生成元の候補  $F_1, F_2, \dots, F_n$  によって生成される  $R$ -加群を  $M$  と書くことにする。我々の問題は、いかにすれば  $M = \mathbb{A}_s$  であるかどうかを確かめられるかということである。

以下、表記を簡単にするため

$$H_{j_1, j_2} := \langle F_{j_1}, F_{j_2} \rangle$$

と書くことにする。ここでは特に  $H_{1,2} \neq 0$  である。このとき、命題5より

$$T := \frac{F_1}{H_{1,2}}R \oplus \frac{F_2}{H_{1,2}}R$$

は階数2の  $R$ -自由加群であり、包含関係

$$M \subset \mathbb{A}_s \subset T$$

を満たす。また、包含関係

$$H_{i,j}\mathbb{A}_s \subset F_i R \oplus F_j R \subset M$$

も成り立つ。したがって、イデアル商の記号を準用すれば、

$$M \subset \mathbb{A}_s \subset [M : H_{i,j}] := \{ F \in T \mid H_{i,j}F \in M \}$$

が成り立ち、ゆえに包含関係

$$M \subset \mathbb{A}_s \subset \bigcap_{i,j} [M : H_{i,j}]$$

が得られる。ここで、 $[M : H_{i,j}]$  は、階数 2 の自由加群である  $T$  の部分加群であるとみなせば、グレブナー基底の理論により具体的な生成元を得ることができる。そして、ここでもし  $M = \bigcap_{i,j} [M : H_{i,j}]$  が成り立っていれば、めでたく  $M = \mathbb{A}_s$  が示せたことになる。

### 4.3 ちょっとした近道

我々が示したかった定理 1 は、理論上は前小節の方法で生成元が決定できるのだが、実際にはもう少し効率の良い方法を使った。本小節では、記号は前小節に準じるが、 $F_1, F_2, F_3$  は、生成元の候補ではなく、条件  $H_{1,2}H_{2,3}H_{3,1} \neq 0$  および  $\gcd(H_{1,2}, H_{1,3}) = 1$  (すなわち  $H_{1,2}$  と  $H_{1,3}$  は  $R$  の元として互いに素) を満たすものとする。このような  $F_1, F_2, F_3$  は、微分作用素を用いれば簡単に作ることができる。前小節と同様、

$$T := \frac{F_1}{H_{1,2}}R \oplus \frac{F_2}{H_{1,2}}R$$

とおけば、 $T$  は階数 2 の  $R$ -自由加群なので、 $T$  の部分加群についてはグレブナー基底の理論を用いてコンピュータでいろいろと計算することができる。特に

$$N := [F_1R + F_3R : H_{1,3}] := \{ F \in T \mid H_{1,3}F \in F_1R + F_3R \}$$

は  $R$ -加群として有限生成であり、生成元の最大重み ( $l$  とおく) 以下の各重みでの次元を計算することができる。一方、すでに知られている次元公式 ([16][15, Theorem 2.1][14, Theorem 2.1]) を用いれば、空間  $\mathbb{M}_{k,k+2s}$  の次元も、 $k \geq 2$  であれば計算することができる。ここで  $\mathbb{A}_s \subset N$  であることを鑑みれば、もし  $N$  が重み 1 の部分 ( $\mathbb{M}_{1,1+2s}$  に対応する部分) を含まず (すなわち重み 1 の次元が 0 であり)、さらに重みが 2 以上  $l$  以下の部分で次元が  $\mathbb{A}_s$  と一致していれば、めでたく  $\mathbb{A}_s = N$  が示せたことになる。これはかなり偶然に頼った戦略のように思えるが、実施には定理 1 に述べた  $s \leq 60$  のすべての場合に、この戦略が通用した。以上が、定理 1 の証明の概略である。

## 4.4 生成元について

生成元の個数について述べた命題2については、紙面の都合で証明を省略するが、もしも生成元が3個以下であったとすると、偶数重みの生成元か奇数重みの生成元かのいずれかは、1個だけしかないとことがポイントとなる。したがって、この証明は、生成元の個数が4個以上の場合にはまったく使えない（と思う）。証明の詳細は、発表されるはずの論文を見ていただきたい。

なお、定理1の結果（生成元の重みの表）を眺めていると、生成元については、次のことが言えそうである。

- ・重み1の生成元は存在しない。
- ・生成元の最小個数は、 $s$  に関してほぼ線形に増加する。

しかしながら、これらが正しいかどうかについて、我々はまだ確かめることができていない。

## 5 判別式8の場合について

これまでに述べた方法は、実2次体判別式が8の場合にも通用する。この章では  $D_K = 8$  すなわち  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  とし、他の記号もこれまでのものを準用する。平行重みヒルベルト保型形式のなす次数付き環の構造は、いくつかの部分的な結果が得られた後、1983年に Müller [12] によって決定されている。すなわち、まず

$$R := \bigoplus_{k: \text{even}} \mathbb{M}_{k,k}^+ = \mathbb{C}[G_2, G_4, G_6] \quad (G_2, G_4, G_6 \text{ は代数的独立})$$

であり、さらに

$$\mathbb{A}_0^+ := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{M}_{k,k}^+ = R \oplus G_5 R, \quad \mathbb{A}_0^- := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{M}_{k,k}^- = G_9 \mathbb{A}_0^+, \quad \mathbb{A}_0 = \mathbb{A}_0^+ \oplus \mathbb{A}_0^-$$

である。ここで  $G_2, G_4, G_5, G_6, G_9$  は  $\mathbb{A}_0$  の生成元であり、添字部分はそれぞれの重みをあらわしている。（もちろんここでの  $G_\bullet$  は前章までのものとは異なる。）

注意すべきは、判別式が5の場合と違って、多項式環  $R$  があらわれるのは、「偶数重みに限って」直和をとった部分であるという事実である。したがって、話をうまく進めるには、重みを偶奇で場合分けしておく必要がある。実際、

$$\mathbb{A}_s^{\text{even}} := \bigoplus_{k: \text{even}} \mathbb{M}_{k,k+2s}, \quad \mathbb{A}_s^{\text{odd}} := \bigoplus_{k: \text{odd}} \mathbb{M}_{k,k+2s}.$$

とおけば、上述の構造定理より、 $F_1, F_2 \in \mathbb{A}_s^\epsilon$  ( $\epsilon$  は even または odd) に対し、

$$\langle F_1, F_2 \rangle := \frac{F_1 F_2^* - F_1^* F_2}{2G_5 G_9} \in R$$

となり、前章までの方法が通用する。我々は、 $D_K = 8$  の場合については、 $s \leq 20$  のすべての自然数に対して、 $\mathbb{A}_s^\epsilon$  の構造を決定した。すなわち、次の定理が成り立つ。

**定理 8.** 20 以下の非負整数  $s$  に対し、 $R$  加群  $\mathbb{A}_s^\epsilon$  の極小自由分解は本文末尾の表のとおりである。特に  $s \leq 20$  においては、 $\mathbb{A}_s^\epsilon$  の射影次元は 1 以下である。

## Acknowledgment

本研究は JSPS 科研費 16K05076 の助成を受けたものです。講演の機会をいただいた研究集会の世話人の皆様方に感謝いたします。

## References

- [1] H. Aoki, *Estimate of the dimension of Hilbert modular forms by means of differential operator*, Automorphic forms and Zeta functions (Rikkyo, 2004), Proceedings of the Conference in Memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, 20-28.
- [2] H. Aoki, *Estimate of the dimensions of mixed weight Hilbert modular forms*, Commun. Math. Univ. St. Pauli. **57-1**, 2008, 1-11.
- [3] H. Aoki and S. Takemori, *Code and data for structure of mixed weight Hilbert modular forms for  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$* , [https://github.com/stakemori/hilbert\\_sqrt5](https://github.com/stakemori/hilbert_sqrt5).
- [4] H. Boylan, S. Hayashida and N.-P. Skoruppa, *Jacobi forms over  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$* , in preparation.
- [5] W. Decker, G. M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, et al., *Singular - an open source computer algebra system*, <https://www.singular.uni-kl.de/>.
- [6] M. Eichler and D. Zagier, *The Theory of Jacobi Forms*, Progress in Math. **55**, Birkhäuser, Boston, 1985.

- [7] E. Freitag, *Hilbert modular forms*, Springer, 1990.
- [8] K. B. Gundlach, *Die Bestimmung der Funktionen zur Hilbertschen Modulgruppe des Zahlkörpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$* , Math. Ann., **152**, 1963, 226–256.
- [9] K. B. Gundlach, *Die Bestimmung der Funktionen zu einigen Hilbertschen Modulgruppen*, J. Reine Angew. Math., **220**, 1965, 109–153.
- [10] M. H. Lee and H. C. Myung, *Hilbert modular pseudodifferential operators of mixed weight*, Proc. Edinb. Math. Soc., **46**, 2003, 269–277.
- [11] M. H. Lee, *Hilbert modular pseudodifferential operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **129**, 2001, 3151–3160.
- [12] R. Müller, *Hilbertsche Modulformen und Modulfunktionen zu  $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$* , Math. Ann., **266**, 1983, 83–103.
- [13] R. Müller, *Hilbertsche Modulformen und Modulfunktionen zu  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$* , Arch. Math., **45**, 1985, 239–251.
- [14] K. Okada, *Hecke eigenvalues for real quadratic fields*, Experimental mathematics, **11.3**, 2002, 407–426.
- [15] H. Saito. *On an operator  $U_\chi$  acting on the space of Hilbert cusp forms.*, Journal of Mathematics of Kyoto University, **24.2**, 1984, 285–303.
- [16] K. Takase, *On the trace formula of the Hecke operators and the special values of the second  $L$ -functions attached to the Hilbert modular forms*, Manuscripta Math., **55-2**, 1986, 137–170.

Table 1: Structure of modules of Hilbert modular forms for  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 

$s$	parity	weights of generators	weights of relations
1	even	6, 8, 10	12
1	odd	5, 7	-
2	even	4, 6	-
2	odd	3, 7	-
3	even	4, 6, 8	10
3	odd	3, 5	-
4	even	2, 4	-
4	odd	5, 5, 7	11
5	even	4, 6, 6	12
5	odd	3, 5, 7	11
6	even	2, 4, 6	10
6	odd	3, 3, 5	9
7	even	4, 4, 6, 8	10, 12
7	odd	3, 5, 5, 7	9, 11
8	even	2, 4, 4, 6	8, 10
8	odd	3, 5, 5, 7	11, 11
9	even	2, 4, 6, 6	10, 12
9	odd	3, 3, 5, 5	9, 11
10	even	2, 4, 4, 6	10, 12
10	odd	3, 3, 5, 5, 7	9, 9, 11
11	even	4, 4, 4, 6, 6	10, 10, 12
11	odd	3, 3, 5, 5, 7	9, 11, 11
12	even	2, 2, 4, 4, 6	8, 10, 10
12	odd	3, 3, 5, 5, 5	9, 11, 11
13	even	2, 4, 4, 6, 6	10, 12, 12
13	odd	3, 3, 5, 5, 5, 7	9, 9, 11, 11
14	even	2, 4, 4, 4, 6, 6	8, 10, 10, 12
14	odd	3, 3, 3, 5, 5, 7	9, 9, 11, 11
15	even	2, 4, 4, 4, 6, 6	10, 10, 10, 12
15	odd	3, 3, 3, 5, 5, 5	9, 9, 11, 11
16	even	2, 2, 4, 4, 4, 6	8, 10, 10, 12
16	odd	3, 3, 5, 5, 5, 5, 7	9, 9, 11, 11, 11
17	even	2, 4, 4, 4, 6, 6, 6	8, 10, 10, 12, 12
17	odd	3, 3, 3, 5, 5, 5, 7	9, 9, 11, 11, 11
18	even	2, 2, 4, 4, 4, 6, 6	8, 10, 10, 10, 12
18	odd	3, 3, 3, 3, 5, 5, 5	9, 9, 9, 11, 11
19	even	2, 4, 4, 4, 4, 6, 6	10, 10, 10, 12, 12
19	odd	3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7	9, 9, 9, 11, 11, 11
20	even	2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6	8, 8, 10, 10, 10, 12
20	odd	3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7	9, 9, 11, 11, 11, 11

Table 2: Structure of modules of Hilbert modular forms for  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 

$A_s$	$M_0$	$M_1$
0	0, 15	-
1	7, 8, 11	13
2	4, 7	-
3	3, 6	-
4	4, 5, 8	10
5	5, 6, 7, 10	11, 12
6	2, 3, 6	8
7	4, 5, 7, 8	10, 13
8	3, 4, 6, 7	9, 12
9	3, 4, 5, 6	10, 11
10	2, 5, 5, 6	11, 12
11	3, 4, 6, 7, 7	9, 12, 13
12	2, 3, 4, 5, 6	8, 10, 11
13	3, 4, 5, 6, 7, 8	9, 10, 12, 13
14	3, 4, 4, 5, 6, 7	9, 10, 11, 12
15	2, 3, 5, 5, 6, 6	8, 11, 11, 12
16	2, 3, 4, 5, 6, 7	9, 10, 12, 13
17	3, 4, 4, 5, 6, 7, 7	9, 10, 11, 12, 13
18	2, 3, 3, 4, 5, 6, 6	8, 9, 10, 11, 12
19	3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8	9, 10, 10, 11, 12, 13
20	2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7	8, 9, 11, 11, 12, 12
21	2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7	8, 9, 10, 11, 12, 13
22	2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7	9, 10, 10, 11, 12, 13
23	3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7	9, 9, 10, 11, 12, 12, 13
24	2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6	8, 9, 10, 10, 11, 11, 12
25	2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7	9, 10, 11, 11, 12, 12, 13
26	2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7	8, 9, 9, 10, 11, 12, 12, 13
27	2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7	8, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 13
28	2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7	9, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 13
29	3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7	9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13
30	2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6	8, 8, 9, 10, 11, 11, 11, 12, 12
31	2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7	9, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 13, 13
32	2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7	8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13
33	2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7	8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13
34	2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7	9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13
35	2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7	8, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13
36	2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7	8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13
37	2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7	9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13
38	2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7	8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13
39	2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7	8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 13
40	2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7	8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13
41	2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7	8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13
42	2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7	8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 13
43	2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7	9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13
44	2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7	8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13
45	2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7	8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13
46	2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7	8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13
47	2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7	8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13
48	2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7	8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13
49	2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7	9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13
50	2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7	8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13
51	2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7	8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13
52	2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7	8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13
53	2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7	8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13
54	2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7	8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13
55	2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7	8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13
56	2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7	8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13
57	2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7	8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13
58	2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7	8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13
59	2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7	8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13
60	2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7	8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13